<u>1 PRESENTATION DE L'ALGEBRE DE BOOLE</u>

L'algèbre que nous allons étudier ressemble par certains aspect, à l'algèbre linéaire on l'appelle :

ALGEBRE BOOLENNE (BOOLE inventeur vers 1850)

Elle est particulièrement bien adaptée aux automatismes et aux ordinateurs. L'algèbre de Boole est un ensemble de variables à deux états, de valeurs :

1 (vrai ; 0 (faux) avec 3 opérateurs NON, ET OU
La combinaison de ces variables à l'aide des opérateurs donne des fonctions, booléennes elles aussi, car le résultat est une variable booléenne

1-1) LES OPERATEURS LOGIQUES A UNE VARIABLE

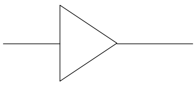
1-1-1) L'opérateur OUI

Il est commode d'indiquer, sous forme de tables, de valeurs les variables soumises aux opérateurs et ce pour toutes les combinaisons possibles des valeurs de ces variables. Ces tables s'appellent des TABLES DE VERITE.

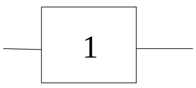
Table de vérité

X	S
0	0
1	1

Symboles

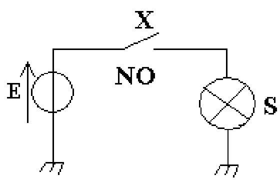


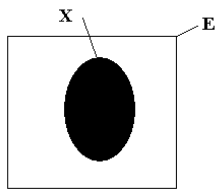
Norme USA



Européenne

Schéma à contact





Equation : $S = X$…..**La sortie de l'opérateur OUI répète son entrée**

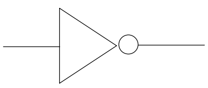
1-1-2) L'opérateur NON le complément

Soit X une variable Booléenne, sa négation **ou complémentation sera notée $\overline{X}$. La sortie de l'opérateur NON est le complément de son entrée.**

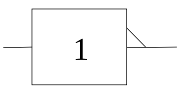
Table de vérité

X	S
0	1
1	0

Symboles

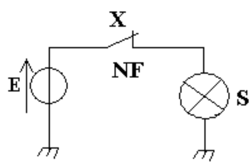


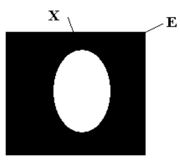
Norme USA



Européenne

Schéma à contact





Equation : $S = \overline{X}$ ………………

1-2) LES OPERATEURS LOGIQUES A DEUX VARIABLES

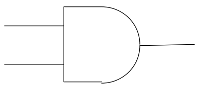
1-2-1) L'opérateur ET (.) (Intersection)

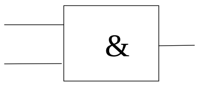
Soit x et y deux variables booléennes. Le résultat de x ET y est réalisé si toutes les variables sont réalisées.

Table de vérité

X	Y	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

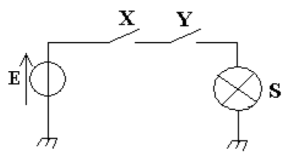
Symboles

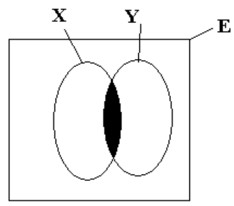

Norme USA



Européenne

Schéma à contact





Equation : $S = X \bullet Y$ ………………

Les combinaisons possibles des entrées apparaissent dans l'ordre binaire naturel. Le nombre N de combinaisons possibles en fonction du nombre n de variables d'entrées est donné par la relation suivante: $N = 2^n$

1-2-2) L'opérateur OU (+) (Réunion)

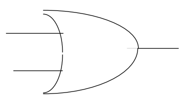
Soit X et Y deux variables Booléennes. Le résultat de X OU Y est selon la table de vérité ci dessous , une variable Booléenne.

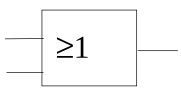
Soit x et y deux variables booléennes. Le résultat de x OU y est réalisé si au moins une variable est réalisée.

Table de vérité

a	b	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

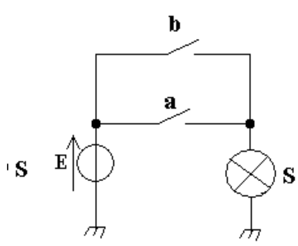
Symboles

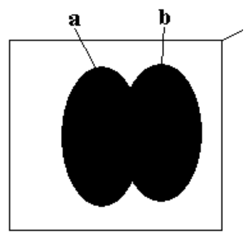

Norme USA



Européenne

Schéma à contact





Equation : $S = a + b$ ………………

Le signe + n'indique pas une addition ordinaire, mais plutôt l'addition logique.

1-3) FONCTION LOGIQUE

Définition : … **On appelle fonction logique une combinaison de variables boo1éennes reliées par les opérateur; NON, ET, OU .**

Exemple : **s=(a+b).(a+c)**

$S1 = a + b.c$ ………………… $S2 = \overline{a}.(b + c)$ …… $S3 = a.b + c$ ……… $S4 = a.(\overline{b} + c)$ …………………

2) LOIS FONDAMENTALES DE L'ALGEBRE DE BOOLE

Soit trois variables booléennes a, b,c et les opérateurs NON, ET, OU permettent de définir les lois suivantes :

2-1) LOIS DE COMMUTATIVITE :

$a+b=b+a$ ……………………………… $a.b = b.a$

2-2) LOIS D'ASSOCIATIVITE :

$(a+b)+c=a+(b+c)$ ……………… $(a.b).c = a.(b.c)$

2-3) LOIS DE DISTRIBUTIVITE :

a) de l'opération ET sur l'opération OU

$a.(b + c) = a.b + a.c$ ……………

b) de l'opération OU sur l'opération ET

$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$

2-4) LOIS D' IDEMPOTENCE :

$a+a=a$ …………………… $a.a = a$

2-5) LOIS DE COMPLEMENTARITE :

$a+\overline{a}=1$ ……………………………… $a.\overline{a} = 0$

2-6) ELEMENT NEUTRE ET ABSORBANT :

$a+0=a$ ………………………………… $a.1 = a$

$a+1=1$ ………………………………… $a.0 = 0$

2-7) LOIS DE DISTRIBUTIVITE INTERNE :

$a + (b + c) = (a + b) + (a + c)$ .... $a.(b.c) = (a.b).(a.c)$

2-8) THEOREME D'ABSORPTION :

$a + \overline{a}.b = a + b$

$a.(\overline{a} + b) = a.b$

Ces Lois permettent de simplifier les fonctions logiques.

Exemple :

$$S_1 = (a + \overline{b}).(a + b) + c.(\overline{a} + b) = a + c$$

$$S_2 = (a + b).(a + \overline{c}).(\overline{b} + c) + a.c = a.(\overline{b} + c)$$

$$S_3 = (a + b.\overline{c}).(c + \overline{a}.b) + a.c.(\overline{a} + b) = a.c + b.\overline{c}.\overline{a}$$

$$S_4 = ((a + b.c).b + \overline{b}.c).(a + b) = a.b + a.c + b.c$$

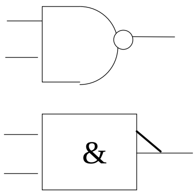
$$S_5 = (a.(b + c) + \overline{b}).((a + b).c + \overline{a}.c) = c.(a + \overline{b})$$

3) FONCTION ET NON, OU NON

3-1) LA FONCTION ET NON OU NAND

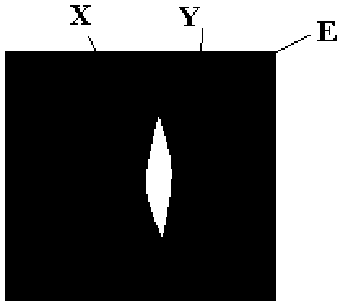
Table de vérité Symboles

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Norme USA

Européenne

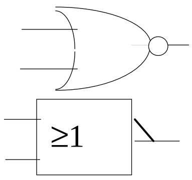


Equation : S = $\overline{a.b}$ est réalisée si au moins une variable n'est pas réalisée

3-2) LA FONCTION OU NON OU NOR

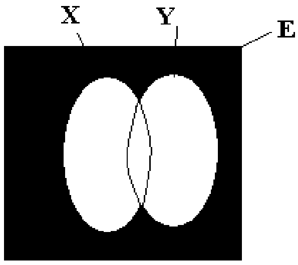
Table de vérité Symboles

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



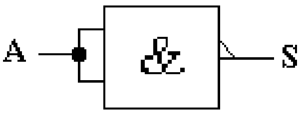
Norme USA

Européenne

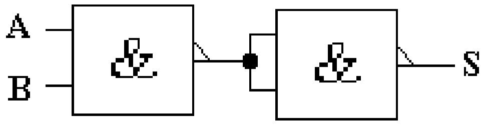


Equation : $S = \overline{a.+b}$ **est réalisée si toutes les variables ne sont pas réalisées**

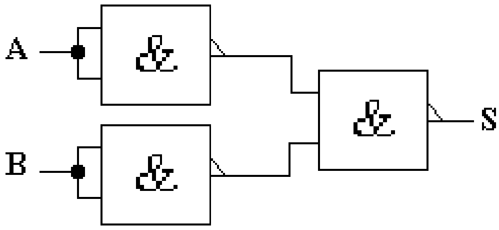
Le **NON** avec une porte NAND



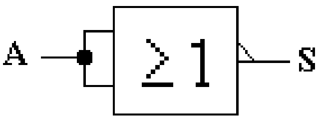
Le **ET** avec une porte NAND



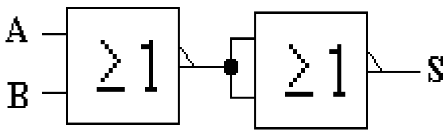
Le **OU** avec une porte NAND



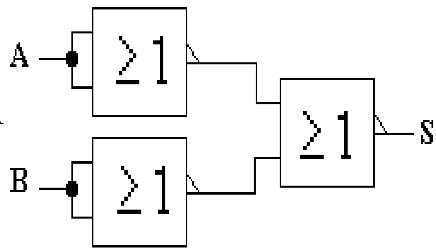
Le **NON** avec une porte NOR



Le **OU** avec une porte NOR



Le **ET** avec une porte NOR



………………………………………………………… ...

Il est facile de réaliser des fonctions logiques en disposant uniquement de portes NAND ou NOR

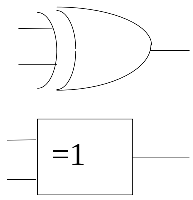
4) LA FONCTION OU EXCLUSIF.(⊕)

La fonction XOR est réalisé si et seulement si une seule variable est réalisée

Table de vérité

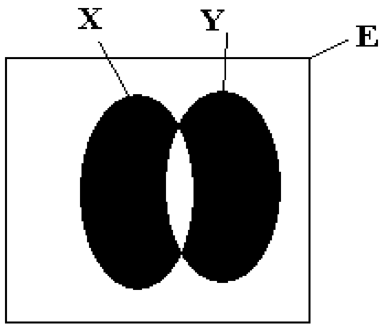
a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symboles



Norme USA

Européenne



Equation : $S = a \oplus b = a.\bar{b} + \bar{a}.b$

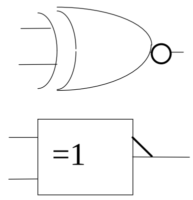
5) LA FONCTION ET INCLUSIF (⊙)

La fonction ET INCLUSIF est réalisé si et seulement si les variable sont identiques

Table de vérité

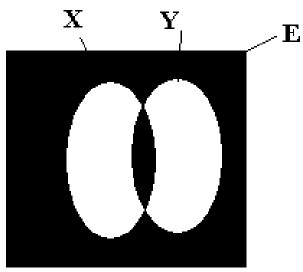
a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symboles



Norme USA

Européenne



Equation : $S = \overline{a \oplus b} = a \odot b = \bar{a}.\bar{b} + a.b$

6) THEOREMES DE DE MORGAN

a	b	$a+b$	$\overline{a+b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}.\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Le complément d'une somme est égal au produit des compléments des termes de cette somme:

a	b	$a.b$	$\overline{a.b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments des facteurs de ce produit:

On peut généraliser ces résultats à n'importe quel nombre de variables. Ces deux théorèmes sont très utiles pour les circuits logiques. Ils permettent entres autres de transformer un produit de sommes ou une somme de produits. Celà est très utile pour les réalisations de OU ou NOR avec des NANDS et de ET ou NAND avec des NOR

On peut généraliser ces résultats à n'importe quel nombre de variables et de complémentations.
Il suffit de compter le nombre de compléments au dessus de chaque variable et chaque opération « ou » et « et ».
Si ce nombre est pair, on conserve la variable ou l'opération.
Si ce nombre est impair, on complémente la variable ou on remplace l'opération « ou » en une opération « et » (et réciproquement.). Attention aux parenthèses des fonctions ! ! ! ! ! ! !

Exemple1 : $S = \overline{\overline{a+b}.c} = a + b + \bar{c} =$

Exemple2 : $S = \overline{\overline{a.b} + c} = a.b.\bar{c} =$

L'utilisation du théorème de De Morgan permet de réaliser des logigrammes a partir de portes Nand et Nor.

Exemple : Réaliser le logigramme de $S = (x+\bar{y}+z).(x+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y})$ avec des Nor

7) DUALITE DE L'ALGEBRE DE BOOLE

Propriétés ou théorème		
COMMUTATIVITE	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
ASSOCIATIVITE	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
DISTRIBUTIVITE	$a.(b+c)=a.b+a.c$	$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$
IDEMPOTENCE	$a+a=a$	$a.a=a$
COMPLEMENTATION	$a+\overline{a}=1$	$a.\overline{a}=0$
ELEMENTS NEUTRES	$a+0=a$	$a.1=a$
ELEMENTS ABSORBANTS	$a+1=1$	$a.0=0$
ABSORPTION	$a+\overline{a}.b=a+b$	$a.(\overline{a}+b)=a.b$
INVOLUTION	$\overline{\overline{a}}=a$	$\overline{\overline{\overline{a}}}=\overline{a}$
DE MORGAN	$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$

On remarque que pour toutes les propriétés de l'algèbre de Boole,
on peut remplacer les opérations « ou » par des opérations 'et » et réciproquement (de même des « 0 » par des « 1 »). La propriété résultante est vraie. Ces propriétés sont duales.

8) EQUATIONS LOGIQUES A PARTIR DE LA TABLE DE VERITE

La variable de sortie est égale à la somme logique des produits logiques des termes des lignes dont la variable de sortie est à « 1 ».
Les termes des produits logiques sont écrits sous forme vraie (a, b….) lorsqu'ils ont la valeur '1' dans la table de vérité.

Les termes des produits logiques sont écrits sous forme complémentée ($\overline{a}$, $\overline{b}$ ….) lorsqu'ils ont la valeur '0' dans la table de vérité.

Exemple 1 :

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
S = {} & \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \\
& + \overline{A}.B.C \\
& + A.\overline{B}.\overline{C} \\
& + A.\overline{B}.C \\
& + A.B.C
\end{aligned}
$$

Remarque : à partir de l'équation ,on peut aussi remplir la table de vérité.

Si une variable manque dans les produits logiques, il suffit de multiplier ce produit par ($manquante+\overline{manquante}$)

Exemple 2 :

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$S = \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

9) TABLEAUX DE KARNAUGH

On peut remplacer un table de vérité par un tableau de Karnaugh.
n variables d'entrées $\Rightarrow$ 2^n combinaisons $\Rightarrow$ 2^n lignes $\Rightarrow$ 2^n cases.
En passant d'une case à l'autre, une seule variable doit changer d'état.

Exemple :

C	A	B	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

C\ AB	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	1

9.1) MISE EN ŒUVRE DES SIMPLIFICATIONS

1) On effectue des regroupements de 2^n cases adjacentes au niveau ‘’ 1 ‘’ si l'on veut exprimer S ou au niveau ‘’ 0 ‘’ si l'on veut exprimer $\overline{S}$.

2) Mise en œuvre des regroupements

2.1) On considère que le tableau est repliable en horizontal et en vertical.

2.2) regroupements les plus gros possible afin d'éliminer le plus grand nombre possible de variables

2.3) Le nombre de groupements doit être le plus petit possible

3) Simplification : * l'équation simplifiée est constituée d'une somme logique de termes extraits de chaque groupement

* Ces termes sont constitués d’un produit logique reliant les variables invariantes dans ce groupement

<u>Nota Bene</u> : On parle de regroupements de cases adjacentes au niveau ‘’ 1 ‘’ mais en fait, il s’agit de regroupements de cases pour lesquels un seule variable change d’état en passant d’une case à l’autre du regroupement (à partir de 5 variables)

<u>9.2) ALEAS TECHNOLOGIQUES</u>

Il arrive parfois que des combinaisons ne peuvent pas être prises par les variables d’entrée. On met alors des ∅ (0 ou 1) dans les cases correspondantes. Lors des regroupements, on donne à ces cases la valeur permettant la plus grande simplification

9.3) Exercices :

Simplifier $S_1 = A.\overline{B}.C + \overline{A}..B.\overline{C} + A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C}$

Simplifier $S_2 = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + A.B.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D}$

Simplifier $S = C.(B.\overline{A} + A.\overline{B}) + A.B.C$

Simplifiez l’expression $\mathrm{A} = (x + \overline{y} + z).(x + \overline{z}).(\overline{x} + \overline{y})$, produit de trois sommes à transformer.

NOM:

Contrôle de cours

1) Donnez les deux formules du théorème de De Morgan.

2) Donnez l'équation, les symboles et la table de vérité de la Fonction ET NON ou NAND

Equation

Symboles

Table de vérité

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

3) Donnez la condition nécéssaire et suffisante qui définit la fonction ET NON.

4) Compléter les équations:

$X.X =$ $\quad\quad$ $X + X.Y =$

$X + \overline{X} =$ $\quad\quad$ $X + \overline{X}.Y =$

NOM:

Contrôle de cours

1) Compléter les équations:

$$A.\overline{A} = \qquad\qquad A + B.A =$$

$$A + \overline{A} = \qquad\qquad A + \overline{A}.B =$$

2) Donnez l'équation, les symboles et la table de vérité de la Fonction OU NON ou NOR

Equation

Symboles

Table de vérité

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

3) Donnez la condition nécéssaire et suffisante qui définit la fonction OU NON.

4) Donnez les deux formules du théorème de De Morgan.

NOM :

Contrôle : Logique combinatoire

1) Complétez les tableaux et nommer les fonctions :

$L = a.b$

a	b	L
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Nom:

$L = a + b$

a	b	L
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Nom:

$L = \overline{a} + \overline{b}$

a	b	L
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Nom:

$L = \overline{a}.\overline{b}$

a	b	L
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Nom

$L=\overline{a}.b+a.\overline{b}$

a	b	L
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Nom:

2) Simplifiez :

$$Z = a.b.c + b.c + b.\overline{b}$$

$$Y = a.b + b + a + \overline{a}.\overline{b}$$

3) Utilisez le théorème de De Morgan puis simplifiez :

$$X = \overline{\left(a + \overline{b}.c\right).\overline{\left(\overline{a}.c + b.a\right)}}$$

$$W = \overline{\left(\overline{a.b.c} + \overline{a} + \overline{b} + d\right)}.\overline{\left(\overline{a.b.d}.\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}\right)}$$

4) Réalisez le logigramme de la fonction suivante:

$$V = \overline{a}.b + \overline{c.d}$$

Réalisez un nouveau logigramme de la fonction uniquement avec des portes OU NON.

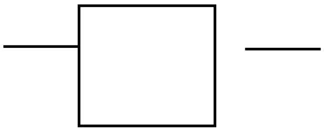
Expliquez quelle est la solution la plus avantageuse.

NOM :

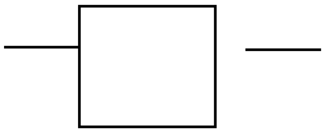
Contrôle de cours

<u>Dessinez les symboles de la norme Européenne des fonctions suivantes :</u>

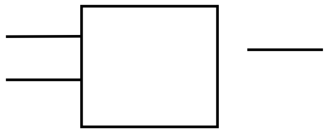
OUI



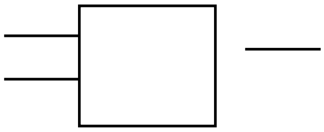
NON



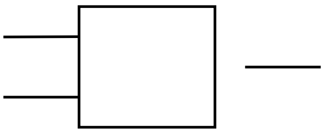
OU



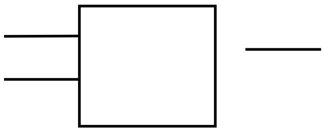
OU EXCLUSIF



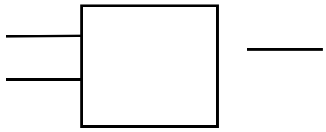
ET



OU NON



ET NON



<u>Complétez les équations :</u>

$a.0 =$ | $a + 0 =$

$a.1 =$ | $a + 1 =$

$a.a =$ | $a + a =$

$a.\overline{a} =$ | $a + \overline{a} =$

$a + \overline{a}.b =$ | $a + a.b =$

<u>Développez puis mettre l'équation sous forme de somme de produits</u>

$$\overline{a + b.c} =$$

$$\overline{a.b.c} + \overline{a + b + c} =$$

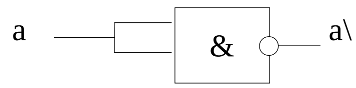
Rappel sur l'universalité des portes OU NON et ET NON.

Pour les portes ET NON.

L'équation d'une porte ET NON est : $L=\overline{X.Y}=\overline{X}+\overline{Y}$

Le complément :

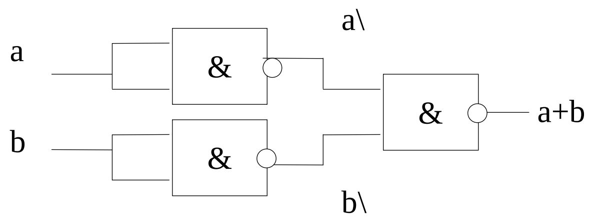
$\overline{a}=\overline{a}+\overline{a}$ donc en identifiant : $\overline{X}=\overline{a}$ $X=a$; $\overline{Y}=\overline{a}$ $Y=a$



La somme :

$a+b$

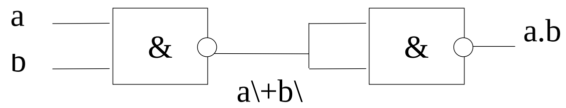
donc en identifiant : $\overline{X}=a$ $X=\overline{a}$; $\overline{Y}=b$ $Y=\overline{b}$



Le produit :

$a.b=\overline{\overline{a.b}}=\overline{\overline{a}+\overline{b}}$

donc en identifiant : $\overline{X}=\overline{a}$ $X=a$; $\overline{Y}=\overline{b}$ $Y=b$

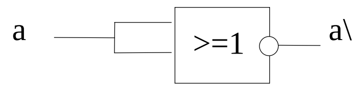


Pour les portes OU NON.

L'équation d'une porte OU NON est : $L=\overline{X+Y}=\overline{X}.\overline{Y}$

Le complément :

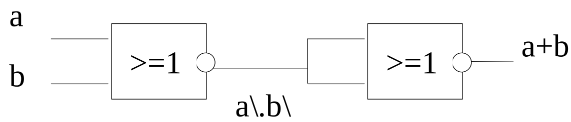
$\overline{a}=\overline{a}.\overline{a}$ donc en identifiant : $\overline{X}=\overline{a}$ $X=a$; $\overline{Y}=\overline{a}$ $Y=a$



La somme :

$a+b=\overline{\overline{a+b}}=\overline{\overline{a}.\overline{b}}$

donc en identifiant : $\overline{X}=\overline{a}$ $X=a$; $\overline{Y}=\overline{b}$ $Y=b$



Le produit :

$a.b$

donc en identifiant : $\overline{X}=a$ $X=\overline{a}$; $\overline{Y}=b$ $Y=\overline{b}$